

Mit Pfeil und Bogen

Teil B: Der gestreckte Pfeilflug

Volker Jentsch
<http://volkerjentsch.de>

Oktober 2022

Der schiefe Wurf, im luftleeren Raum unter dem Einfluß der Schwerkraft eine exakte Parabel, ist fester Bestandteil von elementaren Lehrbüchern der elementaren Physik: ein Ergebnis der klassischen Newtonschen Mechanik. Das gilt näherungsweise auch für den Flug des Pfeils, den man, um bei Newton zu bleiben, zu einem Teilchen der Masse M schrumpfen läßt. Die Flugbahn läßt sich mit Hilfe von zwei einfachen, linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung errechnen.

Komplizierter, wohl auch realistischer, wird es, wenn der Widerstand berücksichtigt wird, die der Pfeil bei seinem Flug durch die Luft erfährt. Der aufsteigende Ast der Kurve ist nicht mehr gleich dem absteigenden, Gipfelpunkt und Weite werden verkürzt. Die Mathematik ist komplizierter; die Bewegungsgleichungen sind über die Geschwindigkeit gekoppelt und nicht linear. Die Flugbahn kann, will man es genau wissen, nur mittels numerischer Verfahren ermittelt werden.

Das Internet ist voller Kurven, Formeln und Graphiken, sogar Programmen, mit deren Hilfe der Flug des Pfeils berechnet werden kann. Es wimmelt von Fachausdrücke, englischen Maßen (grain, spine, lbs, inch etc), Beschaffenheit von Pfeilen (Spitzen, Befiederung, Steifigkeit) und Bögen, ja sogar Überlegungen, wie man das System optimieren kann, um mit Sicherheit ins Gold zu treffen.

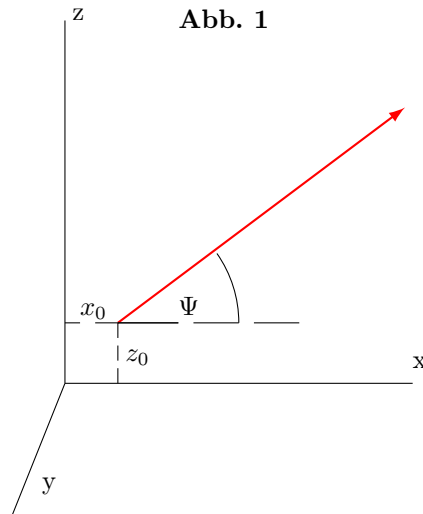
Bevor es ins Detail geht, dieses vorab: ich will der allgemeinen Militarisierung, die im Zuge des Ukrainekriegs um sich greift, mit diesem Artikel keinerlei Vorschub leisten. Zum Töten wurde der Bogen im Mittelalter genutzt. Und ist heutzutage ein Sportgerät, das zwar nicht ungefährlich, aber doch harmlos ist im Vergleich zu den hochpräzisen, hochwirksamen Maschinen, mit dem sich heutzutage umgebracht wird. Er ist ein Gerät, mit dem der Pfeil aus gehöriger Distanz ein selbstgestecktes oder vorgegebenes Ziel treffen kann. Dies in friedlicher Absicht und ohne fremde Hilfsmittel: der Erfolg basiert auf Intuition, Konzentration, Ausdauer und Erfahrung.

Wir begrüßen in diesem Artikel Helene Überflug, die eine besonders begeisterte Bogenschützin ist. Sie übt sich ausschließlich im Umgang mit dem *blanken* Bogen, bestehend aus Wurfarmen, Mittelstück und Sehne, bar jedweder Zuta-

ten. Weil der Umgang mit diesem schlichten, gleichwohl schönen Gerät von mancherlei Zufälligkeiten begleitet wird, interessiert vor allem die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen. Die habe ich im Teil A meines Artikels analysiert. Im aktuellen Teil zwei geht es um die physikalischen, deterministischen, also nicht zufälligen Gesetze, die den Flug des Pfeils bestimmen. Diese zu verstehen, könnte durchaus nützlich sein; nützlich auch, um die eine oder andere Zahl zu errechnen, um dem Ziel, die Mitte der Scheibe zu treffen, näher zu kommen.

1 Theorie

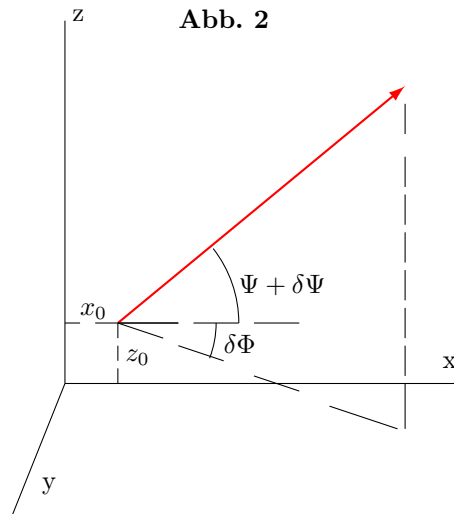
Insbesondere beschäftigt Helene Überflug die Frage, welche Wirkung kleine, oft unwillkürliche, man kann sagen zufällige Abweichungen von der idealen Position des Pfeils beim Lösen auf Flugbahn und Treffer haben. Diese ist relativ einfach zu klären. In Abb. 1 ist die Position des Pfeils (in rot) beim Abschuß (bzw. Lösen) angegeben. Das Ende des Pfeils liegt in (x_0, y_0, z_0) ; er weist in Richtung Ziel; der Winkel zwischen x und y sei Φ , hier $\Phi = 0$, mithin $y_0 = 0$; der Winkel Ψ zwischen x und z sei $\Psi > 0$.



Abweichungen von richtigem Winkel, die gerne durch einen unruhigen Bogenarm oder unvollkommenes Lösen hervorgerufen werden, haben Abweichungen im Ziel zur Folge: in der Vertikalen um die Strecke $\pm \delta z = \pm (x - x_0) \delta \psi$; beim plus-Zeichen geht der Arm zu hoch, beim minus zu tief. Entsprechendes gilt natürlich auch für Winkelabweichungen in der Horizontalen: $\pm \delta (y - y_0) = \pm (x - x_0) \delta \phi$, wenn $\phi = 0$ die Richtung direkt aufs Ziel angibt und plus- bzw. minus- Zeichen für Links- bzw. Rechtsabweichung stehen. Die Situation ist für positive $\delta \Psi$ und $\delta \Phi$ in Abb. 2 und Abb.3 illustriert (Beachte: Ψ, Φ sind Winkel in $[0]$, ψ, ϕ in

Bogenmaß).

Ist das Ziel an der Stelle $x - x_0 = 20\text{ m}$ positioniert, wird der Schwenk des Bogenarms vom richtigen Wert um einen halben Grad nach links oder rechts, bzw. nach oben oder unten, bereits mit $\pm 17.5\text{ cm}$ „bestraft“. Bei 40 m schon das Doppelte. Das vergißt man allzu gerne. Und deshalb ist die genaue Berechnung der Flugbahn, abgesehen von sehr weiten, nicht getreckten Flügen, wie in Abb.5, nichts anderes als eine theoretische Übung. Wer vermag schon zu entscheiden, ob der Bogenarm einen halben Grad in die eine oder andere Richtung abweicht? Beim *blanken* Bogen ist das einzig und allein, wie schon oben angesprochen, eine Frage der richtigen „Eingebung“, insofern also dem Zufall unterworfen, und damit wären wir wieder beim Teil A des Artikels.



Insofern sieht sich Helene Überflug bestätigt in dem, was sie längst weiß: schon kleinste Schwankungen in der Handhabung von Bogen und Pfeil beim Lösen verursachen beträchtliche Abweichungen am Ort des Ziels, und diese sind proportional umso größer, je weiter das Ziel entfernt ist. Doch wie groß muß der Winkel sein, damit Helene, mit festem Arm und sicherem Auge, das Ziel trifft? Der Winkel Φ in der Horizontalen ist gleich Null, sofern sie dem Ziel gerade gegenüber steht. Der Winkel Ψ in der Vertikalen muß dagegen errechnet werden. Für den Fall, dass die Luftreibung vernachlässigbar klein ist, gilt in guter Näherung ($g = 9.81\text{ m/s}^2$) :

$$\Psi = ((z - z_0)/(x - x_0) + 0.5g(x - x_0)/v_0^2)(180/\pi) \quad (1)$$

sofern $\sin \psi \approx \psi$ und $\cos \psi \approx 1$, was nichts anderes bedeutet, als dass der Pfeilflug flach oder gestreckt sein muß. Helen läßt nicht locker. Sie hat ein Händchen fürs Mathematische, in der Schule war sie die Klassenbeste in diesem allseits unbeliebten Fach. Sie möchte wissen, wie sich die Winkel ändern, wenn die

Energieverluste durch Reibung des Pfeils an den Luftmolekülen berücksichtigt würden. Natürlich wüßte sie aus Erfahrung, dass die Pfeile gebremst werden und deshalb weniger weit und weniger hoch fliegen. Aber sie möchte Zahlen haben. Da sie es genau will, muß sie zwei Bewegungsgleichungen lösen:

$$\dot{v}_x(t) = -\mathbf{R}vv_x; \quad \dot{v}_z(t) = -\mathbf{R}vv_z - g \quad (2)$$

Hier ist \mathbf{R} der Luftwiderstand (in $1/m$) und $g = 9.81 m/s^2$ die Schwerebeschleunigung. Die Gleichungen haben die unangenehme Eigenschaft, dass die Geschwindigkeit v bzw. die Komponenten v_x und v_z nichtlinear auftreten, insofern das System, wie in (2) angegeben, nur numerisch gelöst werden kann.

Wenn $\mathbf{R} = 0$, wird aus (2) durch entsprechende Umformungen Formel (1).

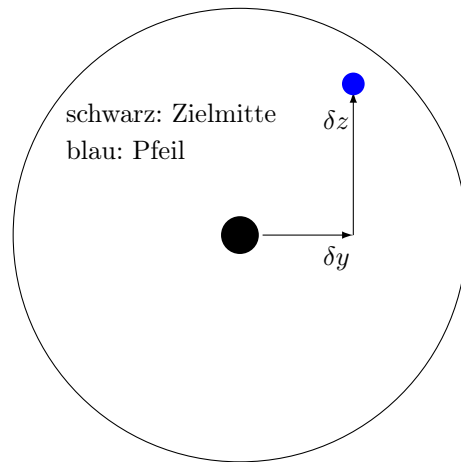
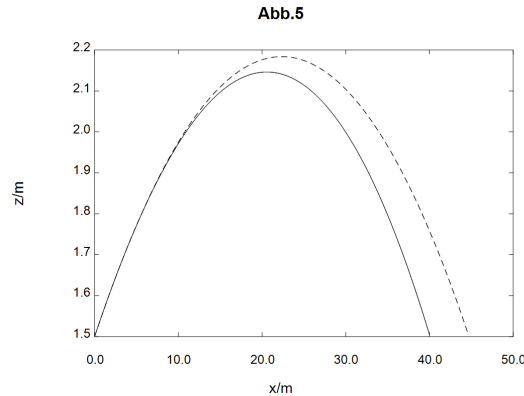


Abb. 3

2 Praxis

Die Anfangsgeschwindigkeit des Pfeils sei v_0 . Helene Überflug ist kräftig und vermag ihren blanken Bogen weit auszuziehen, so dass ihr etwa 38 lbs auf den Fingern liegen. Mithin kann der Pfeil beim Lösen Geschwindigkeiten von $v_0 = 60 m/s$ erreichen. Der Luftwiderstand ist $\mathbf{R} = 0.5c_w\rho q/M$, mit Dichte der Luft $\rho = 1.3 kg/m^3$ und q bzw. M Querschnittsfläche bzw. Masse des Pfeils. c_w ist der Widerstandsbeiwert, über den im Netz viel geredet wird. Das tun wir hier nicht, sondern erlauben für \mathbf{R} einen Bereich von $0.002/m - 0.008/m$, was einem durchschnittlich leichten und windschlüpfrigen Pfeil (etwa $21 g$ mit Querschnitt $0.7 cm$, $c_w = 2 - 7$) entspricht. Helene benutzt Pfeile, die einen Widerstand von etwa $\mathbf{R} \approx 0.004 m^{-1}$ erzeugen. Die Schußentfernung betrage $x - x_0 = 40 m$, das

Ziel befinde sich auf Höhe des Pfeils beim Abschluß, also $z - z_0 = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 60 \text{ m/s}$, $\mathbf{R} = 0.004 \text{ m}^{-1}$, $x - x_0 = 40 \text{ m}$. Wird die Luftreibung berücksichtigt, trifft der Pfeil im Ziel, wenn $\Psi_{num} = 3.5^\circ$. Setzen wir (wider besseres Wissen) $\mathbf{R} = 0$, ist $\Psi = 3.1^\circ$. Die entsprechenden Flugbahnen sind in Abb.4 zusammengefaßt (gestrichelt: ohne Reibung; durchgehend: mit Reibung): die Differenz am Ort des Einschlags beträgt 25 cm .



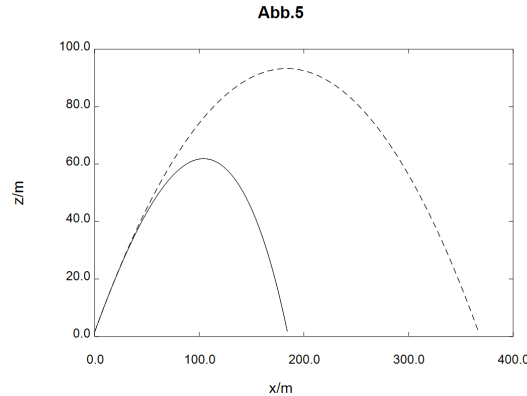
Physikalisch gesehen sind die Ergebnisse leicht nachvollziehbar: ohne Reibung fliegt der Pfeil am weiter, weil ihn nichts bremst, und die Energie bleibt erhalten. Mit Reibung ist die Geschwindigkeit um 15% reduziert, wenn der Pfeil am Punkt $x - x_0 = 40, y - y_0 = 0$ aufschlägt.

Bei einer Schussentfernung von $x - x_0 = 20 \text{ m}$ liegen die Ergebnisse naturgemäß deutlich näher beieinander; hier ist $\Psi_{num} \approx \Psi$, $\Psi = 1.65^\circ$, und die Differenz am Punkt $x - x_0 = 20, y - y_0 = 0$ beträgt nur mehr $\delta z = 3 \text{ cm}$.

Fazit: Wenn, wie schon oben ausgeführt, der Abschlußwinkel klein ist und die Reibung gering ist, ist es völlig ausreichend, mit Formel (1) zu arbeiten, Luftreibung also ganz und gar zu vernachlässigen. Denn welcher Arm kann schon eine Winkeldifferenz von einem halben Grad korrekt einstellen? Wer es unter geeigneten Bedingungen etwas genauer haben will, nutzt (2). Frau Überflug fragt nach, was geringe Reibung denn nun bedeute. Die Aussage sei ihr zu vage. Recht hat sie. Geringe Reibung heißt im Kontext von (2): das Produkt aus $\mathbf{R}v_0T_{Flug}$ sollte klein sein, idealerweise sehr viel kleiner als 1.

} Diese Bedingung ist verletzt, wenn große Weiten angesteuert werden. Frau Überflug verweist mit Recht darauf. Dann muß der Abschlußwinkel, bei vorgegebener Zielposition, gemäß (2) numerisch errechnet werden. Sie schlägt vor, eine Wertetabelle zu erstellen, in dem der Winkel für verschiedene \mathbf{R} und v_0 dargestellt wird. Der aktuelle Wert kann dann durch Interpolation aus der Wertetabelle errechnet werden. Das ersparen wir uns hier (wenngleich ohne Mühe und auf Nachfrage zu erbringen) und begnügen uns mit Abb. 5, die den Pfeilflug mit $\Psi = 45^\circ$ darstellt. Alle anderen Parameter sind unverändert. Die obere Kurve ist ohne, die untere mit Reibung gerechnet. Der Unterschied in der vom Pfeil zurückgelegten maximalen Strecke ist frappierend. Ähnlich verhält es sich mit

der Geschwindigkeit: mit Reibung ist sie am Ende des Flugs zur Hälfte aufgezehrt. Quizz: wo ist sie geblieben? Übrigens: Für den Fall ohne Reibung ist die Schussweite bekanntlich maximal. Das stimmt für den Fall mit Reibung nicht mehr. Der Winkel nimmt mit zunehmender Reibung ab. Quizz: warum ist das so?



3 Anhang: Berechnung von v_0

Sei der Bogen idealerweise durch eine elastische Feder approximiert, bei der ein linearer Zusammenhang zwischen Auszug x und aufzuwendender Kraft (Hook'sches Gesetz) gilt: $F_x = Cx$; $C = (0.45\text{lbs})g/s$. C wird errechnet aus den Angaben, die auf dem Bogen vermerkt sind, oder wird mit Hilfe einer Federwaage gemessen: C ist im übertragenen Sinn die Federkonstante, hat die Einheit einer Kraft/Länge, also etwa N/m . Es ist die Kraft, die erforderlich ist, um die Bogensehne aus der Ruhelage von $x = 0$ nach $x = s$ zu ziehen. Die dabei verrichtete Arbeit ist $A = \int_0^s x F_x dx = Cs^2/2$. Im Idealfall wird die im Bogen gespeicherte (potentielle) Energie A vollständig in kinetische Energie $E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$ umgewandelt. Folglich ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 für einen Pfeil der Masse m : $v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}A} = \sqrt{\frac{Cs^2}{m}}$. Einige Bogenläden werben im Internet mit Vorrichtungen zur experimentellen Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit. Diese werden kleiner ausfallen als der theoretische Wert, da im Bogen, auch im besten, die gespeicherte Energie nicht vollständig in Beschleunigungsenergie umgesetzt wird.